Пособие для поступающих в СУНЦ

Давид Мирзоян

Весна 2024

Аннотация

Данное пособие рассчитано на абитуриентов СУНЦ МГУ, не обладающих серьёзным опытом решения задач, близких к олимпиадным, и сомневающихся в успешном поступлении. Основная цель пособия - помощь в сокращении большой разницы между таким абитуриентом и его будущими одноклассниками из других, более сильных школ с лучшей базой, а непосредственно подготовка к вступительным экзаменам отодвигается на второй план и не будет иметь такого большого значения. Разумеется, одного пособия недостаточно для покрытия. Причины такого решения будут приведены позже.

Разумеется, абитуриентам с олимпиадным опытом это пособие ни к чему - всё, что здесь будет, им должно быть известно. Добавление тем олимпиадных в такое краткое пособие невозможно и бессмысленно (хотя некоторые неравенства показаны будут), к тому же автор не считает себя компетентным в этом вопросе, однако список литературы, полезный в освоении этого материала, будет приведён.

1 Вступительные испытания

Поступление в СУНЦ МГУ формально разделено на три этапа: предварительное тестирование, экзамен 1-го тура и Колмогоровская летняя школа. Первые два этапа проводятся дистанционно (при этом контроль есть только за экзаменом) дважды - основная волна в апреле и резервная в мае. На все направления (за исключением биологического) сдаётся два предмета - математика и какой-то ещё в зависимости от профиля. На тестирование даётся 30 минут, что более чем достаточно. Задания крайне простые, прокторинг отсутствует и единственное, что может помешать сдать тест успешно - опоздание на него.

На первый тур даётся уже больше времени - 120 минут. Задания несколько сложнее, потребуется опыт в решении задач, которые в программе "обычной" школы могут и не встречаться, но таких заданий обычно относительно немного и для их решения не требуется специфических знаний, а только смелость и умение свести на первый взгляд страшную задачу к нескольким простым утверждениям.

Хороший пример такой задачи можно найти в вариантах 10-ФМ-1,2 за 2018 год под номером 4 (под номером 5 в вариантах для хим-био классов задача, обратная ей, решите её сами!):

В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписываются всевозможные прямоугольные треугольники так, что их катеты параллельны катетам исходного треугольника, а вершины лежат на разных его сторонах (не вершинах). Найдите наименьшее значение длин гипотенуз вписанных треугольников.

Приведу частичное решение:

Легко понять, что вписать треугольник так, чтобы он подходил под условия, можно единственным образом (см.рис.), достаточно просто перебрать все варианты расставить одну фигуру внутри другой. Теперь введём прямоугольную систему координат с центром в точке пересечения катетов и с осями, направленными вдоль них (при этом не имеет никакого значения, какую ось делать осью абсцисс, а какую - ординат). Теперь заметим, что выбор любой точки на исходном треугольнике (кроме вершин, конечно) однозначно задаёт две другие точки искомого треугольника. Значит мы можем представить длину гипотенузы вписанного треугольника как функцию от одной переменной, достаточно просто найти координаты всех точек и применить теорему Пифагора, и найти её минимум. Функция получится квадратичной, поэтому найти её минимум можно без использования производной (для поступления знать её в принципе не нужно, но крайне желательно).

Доведите решение задачи до конца самостоятельно.

Как видите, несмотря на страшный вид задачи, решается она довольно просто, методами, известными вам с 8 класса и даже раньше. Повторюсь, в первом туре нет задач, требующих каких-то специальных знаний. Лучший вариант подготовки - закрыть все пробелы в школьной программе и порешать задачи прошлых лет. При этом полезно будет решать не только варианты СУНЦа, но и других школ, в первую очередь - ЦПМ и Физтех-лицея. Впрочем, если ваша цель - исключительно подготовка к поступлению в школу Колмогорова, то можно обойтись и без этого, т.к. сложность задач по математике в первом туре тут существенно ниже.

Особняком стоят задачи с параметрами. Бывают они не каждый год, но в последнее время достаточно часто, поэтому игнорировать их нельзя.

Сложность задач с параметрами варьируется, от самых простых, на решение которых требуется не больше пяти минут (именно такой попался автору в его год поступления), до чуть более идейных, но не таких, какие можно было бы назвать сложными.

Одна из наиболее интересных таких задач попалась в том же 2018-ом году, но в варианте ФМ-0:

Найдите все значения a, при каждом из которых отношение корней квадратного трехчлена x^2+2$\sqrt{5}$x+a^2-2a+5=0 является целым числом.

Первая же мысль - посчитать дискриминант выражения:

$D = 20 - 4(a^2 - 2a + 5) = -4a^2 + 8a \Longrightarrow a \in [0; 2]$

Из теоремы Виета можно понять, что оба корня отрицательны.

Теперь давайте распишем отношение большего по модулю корня к меньшему и обозначим это отношение через k:

$k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{-2\sqrt{5}-\sqrt{8a-4a^2}}{-2\sqrt{5}+\sqrt{8a-4a^2}}$

Оценим это выражение. Для этого заметим, что максимимум отношения достигается в той же точке, что и максимум дискриминанта, т.е. при a = 1. Оценив значение k в этой точке, получаем, что 2<k<3. Значит корни либо равны, либо отличаются в 2 раза. Фактически на этом решение задачи завершено и остается решить два квадратных уравнения, с чем вы справитесь самостоятельно.

Ответ: 0, $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 2$

2 Колмогоровская летняя школа

Второй этап вступительных испытания - Колмогоровская летняя школа (КЛШ). КЛШ проводится очно, на базе СУНЦ МГУ, и достаточно сильно отличается по духу от первого этапа. Формально, КЛШ не предполагает проверки знаний, полученных до неё, и в эту неделю идёт проверка вашей «обучаемости», поэтому темы подбираются такие, чтобы большинство абитуриентов их не изучало, по крайней мере в математике. С физикой немного иначе, и рассказывать вам могут темы, предполагавшиеся как часть обычной школьной программы.

Структура испытаний довольна проста. За неделю вам требуется набрать как можно больше баллов. По итогам КЛШ определяется минимальный балл для поступления в зависимости от баллов других абитуриентов.

Максимум - 500. Набираются баллы в основном за контрольные работы в течение всей летней школы, в особенности - за последние. За работу на семинарах вы также можете их получить, хотя относительно незначительное количество.

Пытаться как-то готовиться к летней школе бессмысленно, список возможных тем слишком обширен и не покрывается даже за год. Угадать, что вам дадут, практически невозможно, поэтому куда рациональнее между испытаниями первого и второго туров заниматься общей подготовкой, чему будет посвящено всё оставшееся пособие.

3 Математическая индукция

Математическая индукция - одна из тех тем, знать которую критически необходимо для занятие математикой. Это один из наиболее мощных методов математических доказательств, доступных школьнику, при этом формулируется он очень просто. Возьмём некое не более чем счётное множество X. Если упрощать, то эта абракадабра означает, что все элементы множества X можно пронумеровать натуральными числами (значит X - счётное) либо же оно конечно (все x $\in X$ можно перечислить). Для примера, множества целых и рациональных чисел являются счётными, множество всех обучающихся СУНЦ МГУ - конечным, а множество действительных чисел - несчётным (если точнее, то континуальным). Пусть нам нужно доказать, для $\forall x \in$ X выполняется некое свойство P(x). Для этого нам нужно доказать истинность P(1) (это называется базой индукции) и доказать, что из истинности P(x) следует истинность P(x+1) (это называется индукционным переходом). Этого и есть искомое доказательство. Звучит очень просто, не так ли? Хоть приведённый выше алгоритм не является подходящим для всех случаев (обычно он встречается в более сильной формулировке, которая не слишком интересует нас в рамках целей данного пособия), в общем-то это вся необходимая теория, относяшаяся непосредственно к индукции.

Впрочем, у вас мог возникнуть вопрос, а почему это вообще работает? Дело в самих основаниях математики - аксиоматике Пеано, в которую входит в том числе аксиома индукции. Арифметика буквально строится на истинности этого факта, а не наоборот.

Теперь перейдём к задачам, классическим в том смысле, что они повторяются из учебника в учебник. Я тоже не откажу себе в удовольствии использовать их.

Задача 1.

Докажите, что 1 + 2 + 3 + ... + n = $\frac{n(n+1)}{2}$
Здесь и далее n $\in \mathbb{N}$

База индукции: n = 1
1 = $\frac{1*2}{2}$
Истина
Индукционный переход:
$n \Longrightarrow n+1$
P(n+1) = P(n) + n+1 = 1 + 2 + 3 + ... + n + n+1 = $\frac{n(n+1)}{2}$ + n+1 = $\frac{n^2+3n+2}{2}$ = $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ч.т.д.

Точно так же можно доказать две другие формулы суммы:

Задача 2.
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$=$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

Задача 3.
$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$=$(\frac{n(n+1)}{2})^2$
Докажите их самостоятельно.

Описать все возможные уловки при решении подобных задач, конечно, нельзя. Но важно сказать, что не всегда нужно доказывать утверждение «в лоб». Иногда это сложнее, чем доказательство более сильное утверждение. В качестве иллюстрации давайте разберём ещё один хрестоматийный пример:
Задача 4.
1 + $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2}$ < 2
Докажем более сильное утверждение:
1 + $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq$ 2 - $\frac{1}{n}$
База: n = 1
1 $\leq$ 2 - 1
Истина

Индукционный переход:
$n-1 \Longrightarrow n$
1 + $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{(n-1)^2} \leq$ 2 - $\frac{1}{n-1}$
Добавим $\frac{1}{n^2}$:
1 + $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \leq$ 2 - $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$ = 2 - $\frac{n^2-n+1}{n(n-1)}$ < 2 - $\frac{n^2-n}{n(n-1)}$ = 2 - $\frac{1}{n}$, ч.т.д.
Далее задачи для самостоятельного решения.
Задача 5.
Доказать, что:
1 + $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$ < 2
Задача 6.
Известно, что x + $\frac{1}{x}$ - целое. Докажите, что x^n + $\frac{1}{x^n}$ также целое.

Задача 7.

Докажите, что каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде n = $a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + ...$,

где $0 < a_1 < 1, 0 < a_2 < 2, 0 < a_3 < 3, ...$

Эти задачи были взяты из задачника "Алгебра и теория чисел для математических школ"под авторством Алфутовой и Устинова. Задачник крайне полезный и достаточной удобный для отработки и закрепления отдельных разделов алгебры, хотя там и присутствуют темы, которых у вас в рамках школьной программы или подготовки к олимпиадам вероятно не будет, прорешать его (хотя бы частично) стоит.

4 Основы теории чисел

Теория чисел - это довольно крупный даже по «школьным» меркам раздел, который довольно полезно (а в тот материал, что будет дан ниже, двже необходимо) знать.

В рассмотрении теории чисел мы ограничимся только операцией сравнения по модулю.

Определение.

Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю n, n $\in \mathbb{N}$, если разность a и b делится нацело на n, т.е. a и b дают одинаковый остаток при делении на n. Пишут a $\equiv$ b (mod n)

Сравнение по модулю обладает рядом свойств:

1. если a $\equiv$ b (mod n), то ka $\equiv$ kb (mod n), k $\in \mathbb{Z}$
2. если a $\equiv$ b (mod n) и c $\equiv$ d (mod n), то a$\pm$c $\equiv$ b$\pm$d (mod n)
3. если a $\equiv$ b (mod n) и c $\equiv$ d (mod n), то ac $\equiv$ bd (mod n)

Первые два утверждения прямо следуют из определения, а для доказательства третьего нам потребуется ещё одно свойство. Однако его нужно давать в совокупности с двумя другими:

1. если a $\equiv$ b (mod n), то b $\equiv$ a (mod n)
2. a $\equiv$ a (mod n)
3. если a $\equiv$ b (mod n) и b $\equiv$ c (mod n), то a $\equiv$ c (mod n)

   Доказательство этих свойств тривиально и остётся читателю в качестве домашнего задания.

   Что интересно, эта тройка свойств является общей для целого ряда операций, или, вернее, отношений. Эти отношения называются отношениями эквивалетности. Такими отношениями являются также, например, равенство чисел и подобие фигур. Это не имеет значения в рамках обсуждаемых в данном пособии тем, однако будет довольно важно в будущем.

Обсудим теперь некоторые задачи.

Задача 4.1

Докажите, что $16^{2014} + 33^{2015}$ делится на 17.

$16 \equiv$ -1 (mod 17) $\Longmapsto 16^{2014} \equiv (-1)^{2014} \equiv 1$ (mod 17)

$33 \equiv$ -1 (mod 17) $\Longmapsto 33^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv$ -1 (mod 17)

$16^{2014} + 33^{2015} \equiv$ 1-1 $\equiv 0$ (mod 17), ч.т.д.

Задача 4.2 (Моск. мат. регата, 9)

Делится ли 21^{10}-1 на 2200?

Утверждение задачи верно, если 21^{10}-1 делится на каждый делитель 2200. Нам достаточно представить это число в канонической форме и рассмотреть делимость на взаимно простые числа, в произведении дающие 2200.

$2200 = 2^3 * 11 * 5^2$

$21^{10} \equiv 5^{10} \equiv 25^5 \equiv 1^5 \equiv 1$ (mod 8)

$21^{10} \equiv (-1)^{10} \equiv 1$ (mod 11)

С последним делителем можно сделать вот так:

$21^5 \equiv (-4)^5 \equiv$ -1024 $\equiv 1$ (mod 25)

Но раз $21^5 \equiv 1$ (mod 25), то 21^{10} тоже

Значит 21^{10}-1 делится на 2200

Решите следующие задачи самостоятельно.

Задача 4.3. (ОММО, 11) Докажите, что число 1000 * 1001 * 1002 * 1003 - 24 делится на 999.

Задача 4.4. (ПВГ, 7-8)

Найдите последнюю цифру числа $202^{303^{404}}$

Задача 4.5. (Ломоносов, 10-11)

Маша задумала 12-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 11-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша.

5 Классические неравества

Последний раздел, включённый в данное пособие, и почти столь же бездонный, как и теория чисел. Мы ограничимся рассмотрением только одного неравенства, особо важных и покрывают значительную часть материала, встречающегося в олимпиадах.

5.1 Сумма обратных чисел

Очень простое, почти очевидное неравенство, но достаточно часто встречающееся в том числе на ЕГЭ и ДВИ:

x + $\frac{1}{x} \geq 2$ для x > 0

x + $\frac{1}{x} \leq 2$ для x < 0

Равенство достигается x = $\frac{1}{x} = 1$.

Доказательство очень простое (рассмотрим только для x > 0):

x^2 +1 $\geq$ 2x

$(x-1)^2 \geq 0$

Это неравенство обычно является частью другого и не существует независимо, поэтому не имеет смысла отрабатывать конкретно его.

5.2 Неравенство о средних

Вы, наверное, помните понятия среднего арифметического (AM) и геометрического (GM) некоего множества. Интересно, что при условии положительности элементов выполняется неравенство AM $\geq$ GM, или:

$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 * x_2 * ... * x_n}$

Доказать это можно многими способами, но вы попробуйте самостоятельно. Подсказка: рассмотрите множество $x_1, x_2, ..., x_n$, среднее арифметическое которого равно a, при этом $\exists x_i >$ a, докажите, что в таком случае $\exists x_j <$ a. Введите $x_{i1} =$ a, $x_{j1} = x_i + x_j$ a. Покажите, что x_{i1} * $x_{j1} > x_i * x_j$ и доведите доказательсво до конца.

Неравенство имеет множество обобщений, однако нас интересует только следующее:

$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+...+x_n}{n} \geq (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{1/n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}$ (1)

причём равенство достигается при равенстве всех чисел.

Однако от его доказательства мы воздержимся.

Перейдём к решению задач. Если не указано иное, все числа - положительны.

Задача 5.1.

$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$

Воспользуемся неравенством AM $\geq$ GM отдельно для каждого множителя левой части:

n * $\sqrt[n]{a_1 * a_2 * ... * a_n}$ * n * $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 * a_2 * ... * a_n}} = n^2 \geq n^2$

Получили, что произведение двух чисел, заведомо не больших, чем изначальные множители, не меньше n^2, что доказывает неравенство.

Задача 5.2. (Неравенство Несбитта)
Доказать, что
$\frac{a}{b+c} + \frac{c}{b+a} + \frac{b}{a+c} \geq \frac{3}{2}$
Здесь нам уже пригодится неравенство о сумме обратных чисел. Воспользуемся им и (1):
$\frac{a}{b+c} + \frac{c}{b+a} + \frac{b}{a+c} \geq \frac{9}{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}} \geq \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

6 Рекомендуемая литература

На этом наше пособие завершается. Естественно, знания, полученные здесь нужно закрепить и углубить. Для этого я решил привести список учебников и Интернет-ресурсов, полезных для освоения математики. Из задачников в первую очередь стоит выделить уже упомянутый сборник Алфутовой "Алгебра и теория чисел для математических школа также сайты mathus.ru и problems.ru. Все задачи разделов 4 и 5 взяты именно оттуда. На mathus кроме собственно задач есть также и теория к ним (хотя и не ко всем разделам, но её более чем достаточно), а problems.ru содержит огромную базу заданий с решениями, ранжированных по сложности и также собранный в разделы. Очень полезно прорешивать листки кружка в Хамовниках (не стыдитесь решать на 2 класса младше, кружок все таки предназначен для Всеросса), в них есть и теория, однако в минимальном объёме. Из книг - "Математика - абитуриенту"Ткачука, Ленинградские математические кружки (с этой книги лучше всего начинать) и журнал "Квант". Естественно, список неполный, но и этого может оказаться более чем достаточно. Было бы полезно также поступить на Малый мехмат МГУ (есть и в дистанционном виде) или в какой-нибудь другой кружок.

На этом всё. Очень надеюсь, что данное пособие окажется небесполезным и окажет, хоть и малую, но всё же поддержку в ваших начинаниях.
‘